2. Sistemas autónomos planos-Trayectorias.

En lo sucesivo vamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de sistemas no lineales:

$$x' = f(x) \tag{1}$$

donde $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, siendo Ω un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$.

Cuando hablemos de sistemas planos estaremos asumiendo que $n = 2$.

Nota 1. *A lo largo del capítulo cuando se hable de "solución" se deberá entender siempre "solución maximal".* □

Observemos que, en aplicación de los resultados de existencia y unicidad estudiados en el capítulo anterior, para cualquier par $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ existirá una única solución de

$$\left[\begin{array}{l} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

definida en (α, ω). Esto se debe a que f es de clase 1 y por lo tanto es localmente lipschitziana.

Comenzaremos estudiando algunas propiedades básicas de las soluciones.

2.1. Algunos aspectos básicos de los sistemas autónomos.

Proposición 2.1. *Sea x una solución de (1) definida en (α, ω). Si existe $t_0 \in (\alpha, \omega)$ tal que $x'(t_0) = 0$, entonces $x(t_0)$ es un punto de equilibrio, $(\alpha, \omega) = \mathbb{R}$ y $x(t) \equiv x(t_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.* □

Demonstración: $f(x(t_0)) = x'(t_0) = 0$ luego $x(t_0)$ es un punto de equilibrio. La unicidad de la solución implica entonces que $x(t) \equiv x(t_0)$. **Q.E.D.**

Proposición 2.2. *Sea x solución de (1), entonces para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, $y(t) = x(t + \tau)$ es también solución de (1) definida en $(\alpha - \tau, \omega - \tau)$.* □

Demonstración: Tenemos: $\dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{dx}{dt}(t + \tau) = f(x(t + \tau)) = f(y(t))$ para todo $t \in (\alpha - \tau, \omega - \tau)$. **Q.E.D.**

Y tenemos

Corolario 2.3. *Sea x solución de (1) verificando $x(0) = x_0$ con $x_0 \in \Omega$, entonces, $y(t) = x(t - t_0)$ es la solución de (1) que verifica $y(t_0) = x_0$.* □

Nota 2. *Consecuentemente en los sistemas autónomos es suficiente estudiar la solución x que pasa por el punto x_0 en el tiempo $t = 0$: $x(0) = x_0$.* □

Nota 3. *Cuando sea preciso notaremos $x(t; x_0)$ la solución de (1) que verifica $x(0) = x_0$. $I(x_0) = (\alpha, \omega)$ será su intervalo de definición.* □

Proposición 2.4. *Sea $x_0 \in \Omega$, $t_1 \in I(x_0)$ y sea $t \in I(x(t_1; x_0))$, entonces $x(t + t_1; x_0) = x(t; x(t_1; x_0))$.* □

Demonstración: Sean $y(t) = x(t + t_1; x_0)$ y $z(t) = x(t; x(t_1; x_0))$, entonces y y z son soluciones de (1) que verifican: $y(0) = z(0) = x(t_1; x_0)$ luego tenemos: $y \equiv z$. **Q.E.D.**

Proposición 2.5. *Sean x e y dos soluciones de (1) tales que $x(t_1) = y(t_2)$, entonces $x(t) = y(t + t_2 - t_1)$ para todo t del dominio de definición de x.* □

Demonstración: Sea $z(t) = y(t + t_2 - t_1)$ entonces z es solución de (1). Además $z(t_1) = y(t_2) = x(t_1)$, luego $z \equiv x$. **Q.E.D.**

Proposición 2.6. *Sea x un solución de (1) tal que $x(t_1) = x(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$, entonces:*

1. *o bien $x(t) \equiv \bar{x} \in \Omega$ es un punto de equilibrio;*
2. *o bien existe T mínimo tal que $x(t + T) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, x es una solución periódica.*

En cualquier caso $(\alpha, \omega) = \mathbb{R}$. □

Demonstración: Supongamos que $t_2 > t_1$. Dado que $x(t_1) = x(t_2)$, de la Proposición 2.5 deducimos que $x(t) = x(t+t_2-t_1)$ para todo t del domino de definición de x. Para cualquier $t' \in \mathbb{R}$ existirá $t \in (0, t_2 - t_1)$ y existirá $q \in \mathbb{Z}$ tal que $t' = t + q(t_2 - t_1)$ de modo que, por periodicidad, x se puede definir en t' como $x(t') = x(t)$ por lo que el dominio de definición de x es todo $\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que no existe un T mínimo tal que $x(t + T) = x(t)$ o, en otras palabras, para todo $\varepsilon > 0$ existe $0 < \tau < \varepsilon$ tal que $x(t) = x(t + \tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, se deduce fácilmente que para cualquier t y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto t' de $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ tal que $x(t') = x(0)$, luego, por la continuidad de x deducimos que $x(t) = x(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. **Q.E.D.**

Para terminar esta parte tenemos:

Proposición 2.7. *Sea x una solución de (1) tal que*

$$\lim_{t \to \omega} x(t) = \xi \in \Omega$$

entonces $\omega = +\infty$ y ξ es un punto de equilibrio: $f(\xi) = 0$.

Análogamente, si

$$\lim_{t \to \alpha} x(t) = \zeta \in \Omega$$

entonces $\alpha = -\infty$ y ζ es un punto de equilibrio: $f(\zeta) = 0$. □

Demonstración: Supongamos que

$$\lim_{t \to \omega} x(t) = \xi,$$

entonces, por el Corolario 2.5 del Capítulo anterior, tenemos $\omega = +\infty$. Entonces:

$$\left[\begin{array}{ll} x_j(t) \overset{t\to+\infty}{\to} \xi_j & \forall\, j = 1, \ldots, n \\ x_j(t+h) \overset{t\to+\infty}{\to} \xi_j & \forall\, j = 1, \ldots, n \quad \forall\, h \in I\!R. \end{array} \right.$$

fijemos un $h \in I\!R$, entonces

$$x(t+h) - x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$$

ahora, para $j = 1, \ldots, n$ existe $0 < \tau_j(t) < 1$ tal que

$$\underbrace{x_j(t+h) - x_j(t)}_{\to 0} = x_j'(t + \tau_j(t)h)h = \underbrace{f_j(x(t + \tau_j(t)h))h}_{\to f_j(\xi)h}$$

por lo que tenemos $f(\xi) = 0$. **Q.E.D.**

2.2. Trayectorias. Dada una solución x del sistema autónomo $x' = f(x)$, definida en el intervalo (α, ω), la trayectoria asociada a x es el conjunto $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in I\!R^n / \in (\alpha, \omega)\}$.

Un tipo muy particular de trayectoria es la que corresponde a las soluciones constantes, i.e. los puntos de equilibrio. En efecto, si $\bar{z} \in I\!R^n$ es un punto de equilibrio del sistema, $f(\bar{z}) = 0 = \bar{z}'$. En este caso la trayectoria se reduce a un punto: el propio punto de equilibrio $\bar{z}$.

Si x_0 no es un punto de equilibrio, i.e. $f(x_0) \neq 0$ lo que significa que al menos una componente de $f(x_0)$ es diferente de 0. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f_1(x_0) \neq 0$. Consideremos la única solución x de

$$\left[\begin{array}{l} x' = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

Dado que $f_1(x_0) \neq 0$, existe un entorno, $B(x_0, \varepsilon)$, de x_0 tal que tengamos $f_1(y) \neq 0$ para todo $y \in B(x_0, \varepsilon)$ entonces, existe un entorno $(-\tau, \tau)$ de 0 tal que $x_1'(t) = f_1(x(t)) \neq 0$ para todo $t \in (-\tau, \tau)$. Luego, sobre $(-\tau, \tau)$, x_1 es monótona en t y se puede invertir: $t = x_1^{-1}(x_1(t))$. Sean $\phi_i = x_i \circ x_1^{-1}$, para $i = 2, \ldots, n$, entonces $x_i(t) = \phi_i(x_1(t))$. Además

$$\frac{d\phi_i}{dx_1} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{dx_1} = \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{f_i(x_1, \phi_2(x_1), \ldots, \phi_n(x_1))}{f_1(x_1, \phi_2(x_1), \ldots, \phi_n(x_1))}$$

es entonces la ecuación diferencial de la trayectoria.

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{array} \right.$$

Los puntos de equilibrio del sistema son: $(0, 0)$ *y cada uno de los puntos del círculo de radio 1:* (x_1, x_2) *tal que* $x_1^2 + x_2^2 = 1$. *Supongamos que* $x_2 \neq 0$ *y que* $x_1^2 + x_2^2 \neq 1$, *entonces:*

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}$$

luego $x_1dx_1 + x_2dx_2 = 0$*. Las trayectorias son, además de los puntos de equilibrio, los circulos de radio* $c \neq 1$*.*

Nota 4. *Una trayectoria del sistema* $x' = f(x)$*, excepto las trayectorias que se reducen a un punto de equilibrio, son recorridas por infinitas soluciones en tiempos distintos. En efecto, si* x_0 *es un punto de* Ω *y* $\gamma(x_0)$ *la trayectoria de la solución* $x(t;x_0)$ *de (1) entonces, para cada* $t_1 \in (\alpha,\omega)$ *la solución de (1),* $x(t;x(t_1;x_0))$ *que verifica* $x(0;x(t_1;x_0)) = x(t_1;x_0)$ *recorre la misma trayectoria que* $x(t;x_0)$ *ya que, según hemos visto antes,* $x(t;x(t_1;x_0)) = x(t+t_1;x_0)$*, pero su recorrido se realiza pasado un tiempo* t_1*. De hecho a cada punto* z *de la trayectoria le corresponde una única solución,* $x(t;z)$*, del sistema (1) la que recorre pasando por el punto* z *en el tiempo* 0*.* □

Además,

Nota 5. *Dos trayectorias distintas no pueden tener un punto en común. En efecto, supongamos que un punto* $x_0 \in \Omega$ *pertenezca a dos trayectorias distintas* γ_1 *y* γ_2*, entonces para cada* γ_i *existe una solución,* $x_i(t;x_0)$*, de (1) que recorre la trayectoria* γ_i *pasando por el punto* x_0 *en el tiempo* 0*. Al tener diferentes trayectorias las dos soluciones son distintas y verifican ambas*

$$\left[\begin{array}{l} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{array}\right.$$

lo cual contradice la unicidad de la solución del problema de valor inicial.

Luego, por un punto de $x_0 \in \Omega$ *pasa una única trayectoria del sistema (1), es la trayectoria, de la solución* $x(t;x_0)$ *(entre otras).*

Para todo punto x_0 *de* Ω *notaremos* $\gamma(x_0)$ *la única trayectoria que pasa por el punto* x_0*. Observemos que* $\gamma(x_0) = \gamma(x(t;x_0))$ *para cualquier* $t \in (\alpha,\omega)$*.*

Así mismo notaremos $\gamma^+(x_0) = \{x(t;x_0) \,/\, t \geq 0\}$ *la semi trayectoria positiva que comienza en el punto* x_0 *y notaremos* $\gamma^-(x_0) = \{x(t;x_0) \,/\, t \leq 0\}$ *la semi trayectoria negativa que termina en* x_0*.* □

Para avanzar en el estudio de las trayectorias necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 2.8. *Una curva* $\gamma \subset \Omega$ *es una curva simple abierta si, y sólo si*

$$\gamma = g(a,b), \quad \text{con } g(t_1) \neq g(t_2) \quad \forall\, t_1,\ t_2 \in (a,b), \quad t_1 \neq t_2$$

donde $g \in \mathcal{C}((a,b);\Omega)$*.* □

Definición 2.9. *Una curva* $\gamma \subset \Omega$ *es una curva simple cerrada si, y sólo si*

$$\gamma = g([a,b]), \quad \text{con } g(t_1) \neq g(t_2) \quad \forall\, t_1,\ t_2 \in [a,b], \\ \text{tales que } 0 < |t_1 - t_2| < b-a \quad \text{y con } g(a) = g(b)$$

donde $g \in \mathcal{C}([a,b];\Omega)$*.* □

Entonces:

Proposición 2.10. *Sea Γ una curva simple (cerrada o abierta) en Ω que no contiene puntos de equilibrio. Supongamos que Γ contiene una trayectoria, $\gamma(x_0)$, entonces $\Gamma = \gamma(x_0)$.* □

Nota 6. *Lo anterior proporciona una idea del tipo de trayectorias que nos encontramos en un retrato de fases:*

- **Puntos** *correspondientes a soluciones constantes (o estacionarias).*
- **Curvas cerradas** *correspondientes a soluciones periódicas.*
- **Curvas abiertas simples**. □

A continuación estudiamos las trayectorias en un ejemplo concreto:

2.3. Ecuaciones de Lotka-Volterra: un sistema depredador-presa. El sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra es un buen ejemplo de cómo, en algunos casos, aunque no sepamos hallar las soluciones del sistema, podemos fácilmente hallar sus trayectorias y diseñar su retrato de fases.

Aquí, para mayor claridad, evitaremos el uso de subíndices: las componentes dela solución se notarán $(x, y) \in I\!R^2$ (en lugar de $x = (x_1, x_2)$); así mismo, elegiremos un par de funciones escalares (f, g) para describir el sistema (en lugar de la función vectorial $f = (f_1, f_2)$).

Así el sistema de Lotka-Volterra se escribirá

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = x(a - by) & (= f(x, y)) \\ y' = y(-c + dx) & (= g(x, y)). \end{array} \right. \tag{2}$$

Es un modelo simple que pretende explicar la interacción entre una especie de depredadores, cuya población es representada por la función $y(t)$, que vive de la caza de otra especie, las presas, cuya población es representada por la función $x(t)$. Los parámetros del sistema: a, b, c y d son positivos. En ausencia de depredadores ($y \equiv 0$) la especie x crece con una tasa $\dfrac{x'}{x} = a$[1] constante, dando lugar a un crecimiento exponencial. En presencia de depredadores la tasa de crecimiento de la especie x disminuye en proporción al número de éstos: $\dfrac{x'}{x} = a - by$. En cuanto a la especie y, en ausencia de presas su tasa de crecimiento es constante y negativa: $\dfrac{y'}{y} = -c$, lo que da un decrecimiento exponencial. En presencia de presas su tasa de crecimiento, $\dfrac{y'}{y} = -c + dx$, aumenta en proporción al número de éstas.

Observemos que, por la naturaleza del problema, nos interesan las soluciones que no sean negativas.

[1] Se supone que esta especie no tiene limitaciones, en particular de nutrientes.

El primer paso en el estudio del sistema de Lotka-Volterra es la determinación de los conjuntos

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{S}_f = \{(x,y) \in \overline{I\!R}^2_+ \,/\, f(x,y) = 0\} \\ \mathcal{S}_g = \{(x,y) \in \overline{I\!R}^2_+ \,/\, g(x,y) = 0\}. \end{array}\right.$$

Esos conjuntos son:

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{S}_f = \{0\} \times \overline{I\!R}_+ \cup \overline{I\!R}_+ \times \left\{\dfrac{a}{b}\right\} \\ \mathcal{S}_g = \overline{I\!R}_+ \times \{0\} \cup \left\{\dfrac{c}{d}\right\} \times \overline{I\!R}_+ \end{array}\right.$$

Su intersección:

$$\mathcal{S}_f \cap \mathcal{S}_g = \left\{(0,0), (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\right\}$$

constituye el conjunto de los puntos de equilibrio del sistema.

Los semi-ejes positivos son trayectorias del sistema:

- $I\!R_+ \times \{0\}$ es la trayectoria de las soluciones $x(t) = 0$, $y(t) = y_0 e^{-ct}$ con $y_0 > 0$ que corresponden a la situación en la que no hay presas y la población de depredadores se extingue exponencialmente; y_0 representa la población inicial de depredadores en $t = 0$.
- $\{0\} \times I\!R_+$ es la trayectoria de las soluciones $y(t) = 0$, $x(t) = x_0 e^{at}$ con $x_0 > 0$; en este caso, en ausencia de depredadores la población de presas crece exponencialmente; x_0 representa la población en $t = 0$.

Nota 7. *Dado que* $(0,0)$ *es un punto de equilibrio y que los semi-ejes positivos son trayectorias (también lo son los semi-ejes negativos si no nos limitamos a soluciones positivas). Luego, cualquier trayectoria que pase por el primer cuadrante,* $I\!R^2_+$ *estará totalmente contenida en éste al no poder cruzar los ejes. Se dice que* $I\!R^2_+$ *es un conjunto invariante (y tambien lo es* $\overline{I\!R}^2_+$*).* □

Definición 2.11. *Un subconjunto* $\mathcal{O} \subset \Omega$ *es positivamente invariante, negativamente invariante o invariante si para todo* $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$*,* $\gamma^+((x_0,y_0)) \subset \mathcal{O}$*,* $\gamma^-((x_0,y_0)) \subset \mathcal{O}$ *o* $\gamma((x_0,y_0)) \subset \mathcal{O}$*.* □

Para terminar con el estudio de los subconjuntos de $\mathcal{S}_f$ y de $\mathcal{S}_g$ observamos que cada una de las semi-rectas $I\!R_+ \times \left\{\dfrac{a}{b}\right\}$ y $\left\{\dfrac{c}{d}\right\} \times I\!R_+$, que se cruzan en el punto de equilibrio $(\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b})$, dividen el primer cuadrante en tres partes:

1. Para $I\!R_+ \times \left\{\dfrac{a}{b}\right\}$:
   a) Sobre $I\!R_+ \times \left\{\dfrac{a}{b}\right\}$ tenemos $f(x,y) = 0$, luego toda solución (x,y) verificará $x' = 0$ sobre este conjunto.
   b) Para $(x,y) \in I\!R_+ \times \left(\dfrac{a}{b}, +\infty\right)$ tenemos $f(x,y) < 0$ luego toda solución (x,y) verificará $x' < 0$ sobre este conjunto.

c) Para $(x,y) \in I\!R_+ \times \left(-\infty, \frac{a}{b}\right)$ tenemos $f(x,y) > 0$ luego toda solución (x,y) verificará $x' > 0$ sobre este conjunto.

2. Para $\left\{\frac{c}{d}\right\} \times I\!R_+$:

   a) Sobre $\left\{\frac{c}{d}\right\} \times I\!R_+$ tenemos $g(x,y) = 0$, luego toda solución (x,y) verificará $y' = 0$ sobre este conjunto.

   b) Para $(x,y) \in \left(\frac{c}{d}, +\infty\right) \times I\!R_+$ tenemos $g(x,y) > 0$ luego toda solución (x,y) verificará $y' > 0$ sobre este conjunto.

   c) Para $(x,y) \in \left(-\infty, \frac{c}{d}\right) \times I\!R_+$ tenemos $g(x,y) < 0$ luego toda solución (x,y) verificará $y' < 0$ sobre este conjunto.

Veamos ahora la ecuación de las trayectorias. Tenemos

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}$$

y separando variables

$$\frac{a-by}{y}y' = \frac{-c+dx}{x}x'$$

luego las trayectorias están definidas implicitamente por

$$dx - c\ln x + by - a\ln y = k$$

es decir que son las líneas de nivel de la función

$$V(x,y) = dx - c\ln x + by - a\ln y$$

cuyo gradiente es

$$\nabla V(x,y) = \left(d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y}\right)$$

y cuya matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

es definida positiva en $I\!R^2$. Luego, V es estrictamente convexa y tiene un mínimo estricto en el punto de equilibrio $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ donde $\nabla V = 0$. Se puede intuir que las curvas de nivel

$$dx - c\ln x + by - a\ln y = k > V\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

tienen que ser curvas simples cerradas por lo que las soluciones del sistema de Lotka-Volterra son periódicas.

Las soluciones son pues soluciones periódicas que giran alrededor del punto de equilibrio $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Así las poblaciones de presas y de depredadores oscilan con amplitudes incluso muy grandes. Sin embargo la media de cada población a lo largo de un periódo se mantiene constante, si T es el periodo de la solución $(x(t), y(t))$, entonces se tiene:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{c}{d}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{a}{b}.$$

En efecto, tenemos

$$\frac{x'}{x} = a - by$$

por lo que

$$0 = \frac{\ln x(T) - \ln x(0)}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T (a - by(t))\,dt = a - \frac{b}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

luego

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{a}{b}.$$

La otra igualdad se establece de manera idéntica.